

Devoir de *synthèse* n°1

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice n°1

3,25 points

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - x}{3x^2 - 2x - 1} \right)$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x \right)$ 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x - 3} \right)$

Exercice n°2

5,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

- 1) a) On pose $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Montrer que pour tout réels $x \neq -1$: $f(x) = g(x)$
b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en -1 et déterminer sa prolongement
- 2) Etudier la parité de la fonction g
- 3) a) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
b) En déduire que g est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$
- 4) Calculer $g(0)$ puis déduire que g est bornée sur \mathbb{R}
- 5) On pose $h(x) = g(x) - 2x$
a) Montrer que h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$
c) Montrer que $\alpha^3 + \alpha = 1$
- 6) Dans la feuille annexe on a tracé C_f : la courbe représentative de la fonction f sur $[0, +\infty[$. Compléter brièvement la construction de C_f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et préciser la valeur exacte de α sur la figure



I. Soit f la fonction définie par le tableau de variation suivant :

| | | | | |
|-----|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -4 | 1 | $+\infty$ |
| f | 0 | -2 | 0 | $+\infty$ |

- 1) Déterminer D_f : le domaine de définition de la fonction f
- 2) Déterminer le signe de $f(x)$ sur D_f
- 3) Résoudre l'équation $f(x) < 0$

II. soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

- 1) Déterminer D_g : le domaine de définition de la fonction g
- 2) Montrer que g est une fonction impaire
- 3) Vérifier que, pour tout réels $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$
- 4) a) Montrer que, pour tous réels a et b appartenant à $]0, +\infty[$,

$$g(a) - g(b) = \frac{b^2 - a^2}{ab(b\sqrt{a^2 + 1} + a\sqrt{b^2 + 1})} +$$

b) En déduire les variations de g sur $]0, +\infty[$

5) on se propose dans cette question de démontrer que g n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0, +\infty[$

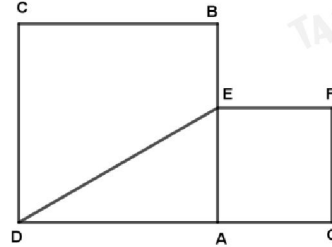
a) Supposons que M est le maximum de g sur $]0, +\infty[$ atteint en un réel a et m son minimum sur $]0, +\infty[$ atteint en un réel b .

Comparer $g(a)$ et $g(\frac{a}{2})$ d'une part et $g(b)$ et $g(2b)$ d'autre part

b) En déduire que g n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0, +\infty[$



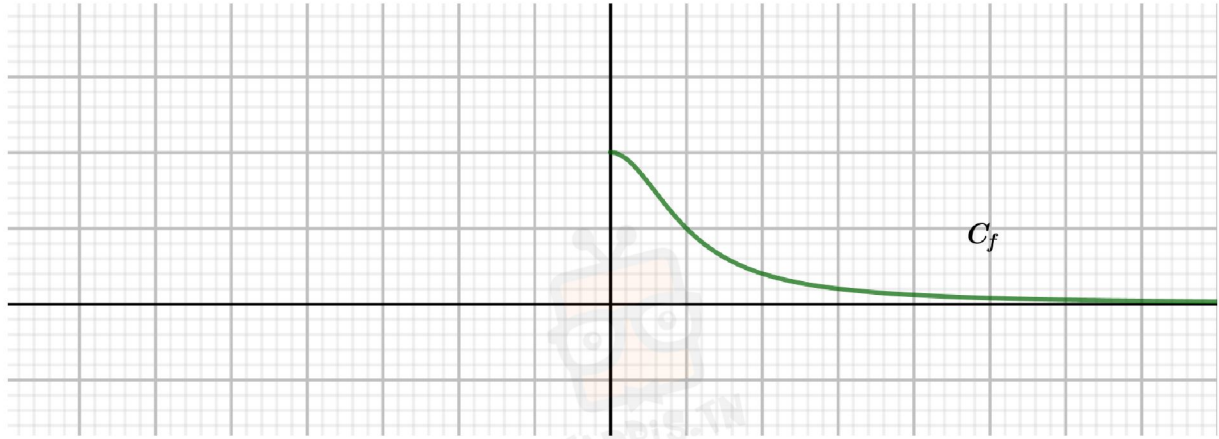
Dans la figure ci-contre $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés tel que $AB = \sqrt{3}$ et E le point du segment $[AB]$ qui vérifie $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$



- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = 3$
 b) En déduire que $DE = 2$ puis $AE = 1$
- 2) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$
 b) En déduire que les droites (DE) et (BG) sont perpendiculaires
- 3) a) Montrer que $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = 3 + \sqrt{3}$
 b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- 4) Soit $I = A * C$
 a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 3$
 b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MC^2 = 7$
- 5) La droite (DE) coupe (BG) en H . Soit $J = B * G$
 a) En exprimant $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GB}$ de deux manières différentes, montrer que $GH = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$
 b) En déduire que $JH = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Feuille annexe

Nom Prénom



في دارك... إتهنوخ على قرابتة إصغارك

